| Geometría Afín y Proyectiva | PARCIAL 2 | 18 Diciembre 2015 |
|---|---|---|
| Tiempo: 1.5 horas | | |

**NOMBRE:** SOLUCIONES

**1. (2 puntos). a)** Probar que los puntos A=(1:1:1:1), B=(-1:2:2:-1) y C=(2:-1:-1:2) están alineados, explicando cómo se hace. Calcular ecuaciones implícitas de la recta que determinan y dar su punto del infinito.

**b)** Calcular la intersección de la recta $T$ anterior con el subespacio $S: x_0 + x_1 - x_2 = 0$, indicando la dimensión de $S$ y de la intersección. Determinar la posición relativa de los subespacios afines $S - S_\infty$ y $T - T_\infty$ $(H_\infty : x_3 = 0)$.

a) A, B, C alineados si los vectores $\bar{a} = (1,1,1,1)$, $\bar{b} = (-1,2,2,-1)$ y $\bar{c} = (2,-1,-1,2)$ de $\mathbb{R}^4$ son coplanarios.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Las ecuaciones de la recta que determinan son las del plano vectorial generado por $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$:

$(x_0, x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot (1,1,1,1) + \mu \cdot (0,3,3,0) \longrightarrow$ paramétricas.

Eliminando parámetros:

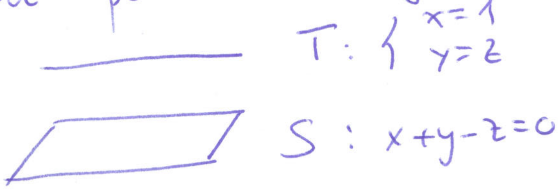
$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & 1 & 3 \\ x_3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_0 = x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases}} \quad \text{y } P_\infty = (0:1:1:0)$$

b) Resolviendo el sistema: $\left.\begin{matrix} x_0 = x_3 \\ x_1 = x_2 \\ x_0 + \cancel{x_1 - x_2} = 0 \end{matrix}\right\} \quad x_0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

Si $S = P(\vec{S})$ y $T = P(\vec{T})$: $\vec{S} \cap \vec{T} = \mathcal{L}\{(0,1,1,0)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S \cap T = \{(0:1:1:0)\}}$ $\dim S = 2$ y $\dim S \cap T = 0$.

$S - S_\infty$ y $T - T_\infty$ son paralelos en el afín porque se cortan en un punto del infinito.



**2. (2 puntos).**

**a)** Definir extensión proyectiva de una aplicación afín del plano. Si $f : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ es una aplicación afín y conocemos su matriz respecto de la referencia $R = \{(-1,-1); (1,2), (3,5)\}$, calcular la extensión proyectiva de $R$ y la matriz de la extensión proyectiva de $f$ respecto de la referencia canónica.

**b)** Dar la matriz de la homografía del plano que transforma los puntos (1:0:0), (0:1:0), (0:0:1) y (1:1:1) en los puntos (1:1:0), (-3:3:1), (-1:-3:1) y (0:2:1) respectivamente.

a) La extensión proyectiva de una aplicación afín $f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ es la aplicación proyectiva $\varphi: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $\varphi|_{\mathbb{A}^2} = f$ y $\varphi(H_\infty) \subset H_\infty$.

$R_{\mathbb{P}} = \{(1:2:0), (3:5:0), (-1:-1:1) ; U: A+B+C\}$ es la extensión proyectiva de $R$ y $M_\varphi(R_{\mathbb{P}}) = M_f(R) \cdot \rho, \forall \rho \neq 0$

Luego: $$\boxed{M_\varphi(R_c) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M_f(R) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \rho, \forall \rho \neq 0}$$

b) Los cuatro primeros puntos forman la referencia canónica de $\mathbb{P}^2$.

Sea $R = \{(1:1:0), (-3:3:1), (-1:-3:1) ; (0:2:1)\}$

Hallamos una base normalizada:

$(0,2,1) = \lambda(1,1,0) + \mu(-3,3,1) + \gamma(-1,-3,1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \gamma = \frac{1}{2}$$

$\mu = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ; $\lambda = 3\mu + \gamma = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$B_N = \{(2,2,0), (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})\}$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \rho, \forall \rho \neq 0}$$

**3. (3 puntos). a)** Definir proyección cónica en $\mathbb{P}^n$ y dar su aplicación lineal asociada.

Sabiendo que $M_\varphi = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ es la matriz de una proyección cónica en $\mathbb{P}^2$, se pide:

**b)** Comprobar que los puntos A=(1:-1:0) y B=(2:0:1) son fijos y calcular los elementos de la proyección.

**c)** Dar una referencia, respecto de la cual la matriz de sea diagonal y dar la matriz en dicha referencia.

a) Si $C \in \mathbb{P}^n$, H hiperplano de $\mathbb{P}^n$ y $C \notin \mathbb{P}^n$, la aplicación $\varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ definida por $\varphi(P) = (\text{recta } C, P) \cap H$, $\forall P \in \mathbb{P}^n - \{C\}$ se llama proyección cónica de centro C sobre H. $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es la aplicación lineal asociada la proyección sobre $\vec{H}$ en la dirección de $\bar{v}$, donde $H = P(\vec{H})$ y $C = [\vec{v}]$.

b)
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$(8:0:4) = (2:0:1)$

$(-4:-4:0) = (1:-1:0)$

<u>CENTRO</u>
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -24 & 8 \\ \cancel{0} & \cancel{-12} & \cancel{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 3c_1 = c_2$$

$c_0 = -5c_1 + 2c_2 = -5c_1 + 6c_1 = c_1 \Rightarrow \boxed{C = (1:1:3)}$

<u>HIPERPLANO</u> (recta de puntos fijos) $H = P(\vec{H})$

$\vec{H} : (x_0, x_1, x_2) = \lambda \cdot (1,-1,0) + \mu(2,0,1)$

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 2 \\ x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_0 + x_1 - 2x_2 = 0}$$

c) $R_{\mathbb{P}} = \{\underbrace{A, B}_{\text{FIJOS}}, \underset{0}{C} ; A+B+C\}$, $\boxed{M\varphi(R_{\mathbb{P}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \rho, \ \forall \rho \neq 0}$

**4. (3 puntos).** Dadas las cónicas proyectivas: $ax_0{}^2 + x_1{}^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2 = 0$

**a)** Clasificarlas proyectivamente y clasificar las cónicas afines en $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 - \{x_2 = 0\}$, según los valores de a (real).

**b)** Para a=0 calcular sus elementos.

**c)** Para a=0 calcular la cónica dual y utilizándola averiguar si la recta $x = 4y$ es tangente a la cónica.

a) • $M_C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $|M_C| = -4 \neq 0 \Rightarrow$ cónica no degenerada o vacía.

Para $x_0 = 0$: $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0 \iff (x_1 - x_2)^2 = 0$

$(0:0:1) \in C \Rightarrow$ no es vacía. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{CÓNICA NO DEGENE.}}$

• $C_\infty = C \cap (x_2 = 0)$ : $ax_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 = 0$

Si $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow (0:0:0) \notin \mathbb{P}^2$

Si $x_0 = 1$: $a + x_1^2 + 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$

Para $a = 1$ : $C_\infty$ 1 punto $\Rightarrow$ $\boxed{\text{PARÁBOLA}}$

Para $1-a>0$ $(a<1)$ : $C_\infty$ 2 puntos $\Rightarrow$ $\boxed{\text{HIPÉRBOLA}}$

Para $1-a<0$ $(a>1)$ : $C_\infty$ $\phi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{ELIPSE}}$

b) Para a=0. HIPÉRBOLA.

CENTRO (polo de la recta del infinito)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \longrightarrow c_2 = -c_1 \\ 0 = c_0 + c_1 - c_2 \longrightarrow c_0 = -2c_1 \\ 1 = c_0 - c_1 + c_2 \longrightarrow 1 = -4c_1 \end{cases}$$

$c = (\frac{1}{2} : -\frac{1}{4} : \frac{1}{4}) \Rightarrow \boxed{c = (2, -1)}$

ASÍNTOTAS (rectas que pasan por el centro y sus direcciones las dan los puntos del infinito).

$P_\infty = (1:0:0)$ y $Q_\infty = (1:-2:0)$

Asíntota 1 : $y = k$ (sustituyendo c) $\boxed{y = -1}$

Asíntota 2 : $2x + y + h = 0$ (sust. c) $\boxed{2x + y - 3 = 0}$

c) $M_{C^*} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $a_1^2 + a_2^2 + 4a_0a_1 + 4a_0a_2 - 2a_1a_2 = 0$

$(1:-4:0)$ verifica la ecuación $\Rightarrow \boxed{\text{Sí}}$